Distributietheorie 3-7-'97

Tentamenopgave

I

1. Zij f een element uit $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Wat wordt bedoeld met de uitdrukking: 'De afgeleide van f in de zin van distributies' ?

2. Bepaal de afgeleide in de zin van de distributies van $\log(|x|)$.

II

1. Wat kan je zeggen van een distributie $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ met drager bevat in $\{0\}$?

2. Bereken voor p, q in $\mathbb{N}$ de distributie $x^p\delta^{(q)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Aanwijzing: Onderscheidt de gevallen $p > q$ en $p \leq q$.

III

1. Laat S en T distributies op $\mathbb{R}^n$ zijn. Geef aan wanneer S en T aan de convolutievoorwaarde voldoen, en definieer in dat geval het convolutieproduct $S * T$.

2. Zij S en T distributies op $\mathbb{R}$ die aan de convolutievoorwaarde voldoen. Toon aan dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ de volgende formule geldig is:

$$x^n(S * T) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^k S) * (x^{n-k} T)$$

IV

Beschouw de differentiaaloperator $D = (\frac{d}{dx})^2 + 3\frac{d}{dx} + 2$.

1. Bepaal de fundamentele oplossing van D behorend tot $\mathcal{D}'_+$.

2. Bepaal de oplossing $T \in \mathcal{D}'_+$ van de vergelijking $DT = Ye^x$ (Y de Heaviside één-stap functie).

3. Bepaal, m.b.v. de symboolrekening, de oplossing f van het volgende klassieke beginwaardeprobleem, waarbij g een continue functie op $\mathbb{R}$ is:

$$Df = g, f(0) = 1, f'(0) = 1$$

4. Wat is de oplossing wanneer $g = 1$?